

Kernbindungsenergien und Zweikörperkräfte

Von Wolfgang Wild und Karl Wildermuth

Institut für theoretische Physik der Universität München

(Z. Naturforsch. 9a, 799—800 [1954]; eingeg. am 16. Juli 1954)

Bekanntlich erfüllen die aus den Zwei-Nukleonenstreuexperimenten erschlossenen Kräfte zwischen zwei Nukleonen nicht die Sättigungsbedingungen von Volz¹ u. a. Sie führen darum zu viel zu großen Bindungsenergien und viel zu kleinen Radien für die stabilen Kerne.

Eine Berechnung des Grundzustandes von O¹⁶ nach dem Variationsprinzip²

$$E \geq \text{Min} (\Psi^* H \Psi) \tag{1}$$

führt bei Variation des Radius zu einer Bindungsenergie von 325 MeV zu einem stabilsten Kernhalbmesser von $1,7 \cdot 10^{-13}$ cm, während die empirischen Werte 125 MeV bzw. $3,5 \cdot 10^{-13}$ cm sind.

Für die Wellenfunktion Ψ wurde dabei die antisymmetrisierte Linearkombination

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^A \psi_{n,p_i}(r_i) \tag{2}$$

mit Oszillatoreigenfunktionen als Einteilchenwellenfunktionen verwendet. Der Hamilton-Operator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^A \Delta_i + \sum_{i < k} V(r_{ik}) \tag{3}$$

enthielt nur Zweikörperkräfte, als Potential diente ein Gauß-Potential, dessen Konstanten aus der Bindungsenergie des Deuterons und des Heliums festgelegt wurden:

$$V(r_{ik}) = -(W + MP_M^{ik} + BP_B^{ik} + HP_H^{ik}) e^{-r_{ik}/\beta}, \tag{4}$$

wo P_M^{ik} = Ortsaustauschoperator für die Teilchen i und k , P_B^{ik} = Spinaustauschoperator, P_H^{ik} = Orts- und Spinaustauschoperator,

$$W = M = 14 \text{ MeV}, B = H = 2,48 \text{ MeV}, \beta = 2,64 \cdot 10^{-13}. \tag{5}$$

Es zeigt sich nun aber, daß dann, wenn der Kernradius nicht durch Variation bestimmt, sondern empirisch vorgegeben wurde, die berechnete Bindungsenergie mit 144,58 MeV recht nahe (etwa 15%) an dem gemessenen Wert liegt.

Diese Erfahrung wird nun bestätigt durch Rechnungen über mittlere und schwere Kerne, bei denen als Einteilchenwellenfunktionen ebene Wellen zugrunde gelegt wurden. Bei Voraussetzung eines Basisvolumens von der Größe des empirischen Kernvolumens ergeben sich für den Faktor des Volumenterms in der Bethe-Weizsäcker-Formel für die Kernbindungsenergien

$$E = -a \cdot A - b \cdot A \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 + cA^{2/3} + \frac{3}{5} \frac{c^2}{R} Z^2 \tag{6}$$

¹ Volz, Z. Phys. 105, 537 [1937]; Wigner, Proc. Nat. Ac. Sci. 22, 662 [1936].

² P. Urban, A. Florian u. K. Wildermuth, Z. Naturforsch. 9a, 748 [1954].

die in Tab. 1 aufgeführten Werte (empirischer Radius $R = 1,4 \cdot A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ cm). Die Potentiale wurden nach der effective-range Theorie³ aus den Zwei-Nukleonenstreu-daten berechnet.

	a [MeV]	$W = M$ [MeV]	$H = B$ [MeV]	$10^{13} \cdot \beta$ [cm]
Kastenpotential I	12,5	14,45	2,85	2,07
Kastenpotential II	14,0	12,60	2,95	2,25
Exponentialpotential	14,7	77,8	15,7	0,68
Yukawa-Potential	15,6	24,2	4,75	1,25

Tab. 1.

Nur für das Exponentialpotential führen Triplett- und Singulettstreu-daten auf die gleiche Kraftreichweite. Das Kastenpotential I basiert nur auf den Triplett-daten, im Kastenpotential II und im Yukawa-Potential ist die angegebene Kraftreichweite der Mittelwert der aus Singulett- bzw. Triplett-daten erschlossenen Reichweiten.

Die empirischen Werte für die Konstante a schwanken (je nach der Größe des verwendeten Oberflächen-terms) zwischen 14 und 15,7 MeV⁴. Die berechneten Werte für die drei letzteren Potentiale stimmen also so gut wie möglich mit der Erfahrung überein.

Wir wollen noch die Größe der Oberflächenenergie abschätzen. Hierzu nehmen wir an, daß die Dichte $\rho/2$ am Rande gemäß Abb. 1 wie $e^{-2r/\lambda}$ exponentiell abfällt. Statt den Kernradius vorzugeben, wählen wir den Parameter λ in Abb. 1 so, daß

1. die Dichte im Innern den bereits oben angenommenen Wert $\sigma = 3A/4\pi R^3$ hat,

2. die Gesamtzahl der Nukleonen gleich A ist, so daß

$$4\pi \int_0^\infty \sigma(r) r^2 dr = A \tag{7}$$

gilt. Der Teil der potentiellen Energie, der nur die gewöhnliche Dichte enthält, läßt sich nunmehr ohne weitere Schwierigkeiten berechnen. In den Termen mit der gemischten Dichte werden die Wellenfunktionen näherungsweise als ebene Wellen mit einem geeigneten Amplitudenfaktor für den exponentiellen Abfall am Rand angenommen.

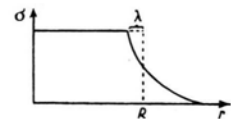


Abb. 1. Dichteverlauf.

Bei der Abschätzung der kinetischen Energie sind zwei Oberflächeneffekte zu berücksichtigen:

1. An den oszillierenden Teil der Wellenfunktion im Innern des Kernes schließt sich ein exponentiell abfallender Teil an. Die Bedingung des stetigen Anschlusses führt zu einer kleineren Wellenlänge als für den Fall, daß die Wellenfunktion am Rande verschwindet.

³ Blatt u. Jackson, Phys. Rev. 76, 18 [1949]; H. A. Bethe, Phys. Rev. 76, 38 [1949]; E. E. Salpeter, Phys. Rev. 82, 60 [1951].

⁴ W. Heisenberg, Theorie des Atomkerns (1951); Feenberg, Rev. Mod. Phys. 19, 239 [1947].



2. Der exponentiell abfallende Teil der Wellenfunktion außerhalb des als Potentialtopf idealisierten Kerninnern liefert einen negativen Beitrag zur kinetischen Energie.

Beide Effekte, die sich mittels plausibler Näherungsannahmen auf Funktionen des Abfallparameters ρ zurückführen lassen, verringern den Anteil der kinetischen Energie gegenüber dem nach Thomas-Fermi berechneten.

Die analytische Form der Ausdrücke für die Bindungsenergie ist verhältnismäßig kompliziert. Eine Entwicklung nach fallenden Potenzen von R ergibt als Hauptterm der Bindungsenergie den bereits angegebenen — schon aus einer einfachen Rechnung zu gewinnenden — Volumenterm, der proportional zu A ist. Der Oberflächenterm entsteht im wesentlichen aus dem Zusammenspiel von Ausdrücken, die zu $A^{2/3}$, $A^{1/3}$ und A^0 proportional sind.

Die Größe ρ kann dem Einteilchenmodell (Potentialtopf) entnommen werden und berechnet sich aus der mittleren Bindungsenergie zu

$$\rho = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ cm.}$$

Praktisch zum gleichen Ergebnis für ρ gelangt man, wenn man unseren berechneten Wert für die Bindungsenergie in Abhängigkeit von ρ zum Minimum macht. Die Änderung mit dem Atomgewicht A ist geringfügig⁵.

Das Ergebnis unserer Abschätzung für die Bindungsenergie gibt bei Einbeziehung der Coulomb-Energie und unter Verwendung des von Schlögl bereits aus den Zweikörperkräften berechneten Asymmetrieterms⁶ den Gang der Bindungsenergie mit dem Atomgewicht gut wieder. Die spezielle Form des Potentials beeinflusst das Ergebnis nicht beträchtlich, was wegen der kurzen Reichweite der Kernkräfte von vorneherein zu erwarten ist. Beim Exponentialpotential ist der Oberflächeneffekt etwas größer. Natürlich hängt das Ergebnis sehr empfindlich vom Kernradius ab. Zum oberen Kurvenpaar in Abb. 2 gehört der Radius $R = 1,4 \cdot A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ cm}$, zum unteren der ebenfalls in der Literatur oft verwendete Wert⁷

$$R = 1,465 \cdot A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ cm.}$$

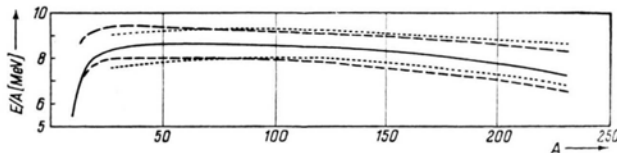


Abb. 2. Mittlere Bindungsenergie im Atomkern.

— experimenteller Verlauf,
 --- berechnet mit Kastenpotential II,
 - - - berechnet mit Exponentialpotential.

⁵ Vgl. C. F. v. Weizsäcker, Z. Phys. **96**, 431 [1935].

⁶ Schlögl, Z. Phys. **135**, 441 [1954].

⁷ Feenberg⁴.

⁸ Fincke, Ann. Phys., Lpz. (6) **14**, 97 [1954].

Die empirischen Werte liegen zwischen den mit diesen gebräuchlichen Radien berechneten Bindungsenergien.

Während die Berechnung des Volumeneffektes unabhängig von der Oberflächenstruktur ist und zur Herleitung des Ergebnisses keine problematischen Näherungen notwendig sind, so daß man dem Ergebnis Vertrauen schenken darf, gingen in die Abschätzung des Oberflächeneffektes einige recht grobe Extrapolationen ein.

Da jedoch der Oberflächenterm in der Bethe-Weizsäcker-Formel selbst ein Korrekturterm ist, wird auch eine grobe Abschätzung das Ergebnis nicht sehr verfälschen. Wenn man bedenkt, daß die Bindungsenergie sich als Differenz weit größerer in verschiedener Weise zu berechnender Terme ergibt, nämlich der kinetischen und der potentiellen Energie, so darf man nach unseren Ergebnissen jedenfalls feststellen:

Bei Vorgabe des empirischen Kernradius bestreiten die Zweikörperkräfte mindestens 90% des Erwartungswertes der potentiellen Energie.

Hieraus ergibt sich ein wichtiger Schluß: Die Vorgabe des Radius ist nur zu rechtfertigen, wenn man das Auftreten zusätzlicher Kräfte — kurzreichweitige Abstoßungskräfte oder Mehrkörperkräfte — neben den Zweikörperkräften annimmt. Diese müssen den empirischen Radius zum stabilsten machen, was ohne ihr Mitwirken nicht der Fall ist². Unser Ergebnis scheint darauf hinzuweisen, daß diese Kräfte bei einer Annäherung der Nucleonen unter einen gewissen Abstand sehr abrupt in Erscheinung treten und bei größerer mittlerer Nucleonenentfernung keine wesentliche Rolle spielen. Der Beitrag einer solchen Kraft zur potentiellen Energie darf 10% nicht übersteigen.

Versucht man dieses Ergebnis zu verstehen, so könnte man an starre Nucleonenkugeln denken. Aber diese scheinen mit den Zweinucleonen-Experimenten bei hohen Energien nicht verträglich zu sein⁸. Darum ist es wahrscheinlicher, daß sehr rasch anwachsende Mehrkörperkräfte auftreten, wenn mehrere Nucleonen auf die Reichweite der Kernkräfte aneinander herankommen, was auch durch Experimente nahegelegt wird, die eine starke nichtlineare Wechselwirkung der Mesonen wahrscheinlich machen⁹. Die kritische Grenze für den Einflußbereich der Mehrkörperkräfte sollte beim mittleren Nucleonenabstand im stabilen Kern, also bei rund $1,3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ liegen.

Aus den ersten Versuchen, die Mehrkörperkräfte auf Grund einer nichtlinearen Mesonentheorie zu berücksichtigen^{10,11}, läßt sich abschätzen, daß die bisher zugrunde gelegte 3. Potenz im nichtlinearen Term nicht jäh genug ansteigende Mehrkörperkräfte liefert. Unser Ergebnis legt vielmehr nahe, daß man zumindest eine höhere Potenz als die dritte (bei kleinerer Kopplungskonstante) für diesen Term annehmen muß.

Herrn Prof. F. Bopp danken wir vielmals für anregende Diskussionen.

⁹ W. Heisenberg, Kosmische Strahlung, II, 7, Springer 1953.

¹⁰ Schiff, Phys. Rev. **84**, 1 [1952]; W. E. Thirring, Z. Naturforsch. **7a**, 63 [1952].

¹¹ Mittelstaedt, Z. Phys. **137**, 545 [1954].