„Infrarotkatastrophe“ auch bei der ersten nichtverschwindenden Näherung einer richtig formulierten Theorie, die die grundsätzlichen Divergenzen nicht enthält, auftreten würde, wenn man diese Theorie mit der Störungsrechnung behandelte.

Zusammenfassend ist also zu den beiden letzten Abschnitten zu sagen, daß neben den in I besprochenen, in den Grundlagen der heutigen Theorie begründeten (grundsätzlichen) Schwierigkeiten, die sich außerdem in der Divergenz der höheren Näherungen der Übergangswahrscheinlichkeitsamplituden äußern, noch einige andere (formale Schwierigkeiten) vorhanden sind, die auf der Verwendung der niedrigsten Näherung der Störungstheorie beruhen und die auch bei Behandlung einer richtig formulierten Theorie mit der Störungsrechnung auftreten würden. Dazu gehören unter anderem die oben erläuterten Schwierigkeiten der Heitlerschen Theorie der Strahlungsdämpfung, der nach der Störungstheorie berechneten Wirkungsquerschnitte in den Mesontheorien sowie die der Strahlungskorrektion bei der Streuung. Will man sie durch den Einschluß höherer Näherungen beseitigen, so kommt man ohne die Verwendung besonderer durch die Theorie nicht begründeter Kunstgriffe, deren vollkommen einwandfreie Durchführung bisher auch nicht möglich war, notwendig auf die fundamentalen Divergenzen zurück, wodurch ein gewisser Zusammenhang zwischen den beiden Arten von Schwierigkeiten besteht.

Meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. F. Bopp, München, bin ich für viele Anregungen und sein stetes Interesse am Fortgang der Arbeit, auch unter den schwierigen Umständen der räumlichen Trennung, zu großem Dank verpflichtet. Hrn. Prof. Dr. E. Fues, Stuttgart, danke ich für die Möglichkeit, die Grundgedanken der vorliegenden Arbeit vorzutragen, sowie für den Hinweis auf eine Vereinfachung in I. Hrn. Prof. Dr. M. Müller, Tübingen, danke ich für aufschlußreiche mathematische Diskussionen, Hrn. Prof. Dr. W. Kossel, Tübingen, für die Möglichkeit, in seinem Institut zu arbeiten, und Hrn. Doz. Dr. A. Flammersfeld, Mainz, für die Beschaffung schwer zugänglicher Literatur.

Über Wellen in anisotropen Ausbreitungsverhältnissen

Von HERMANN POEVERLEIN

Aus dem Elektrophysikalischen Institut der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforschg. **5 a**, 492—499 [1950]; eingegangen am 12. Juli 1950)

Ein Gesetz der Kristalloptik sagt: Die Strahlrichtung ist die Normale zur Indexfläche (gemeint ist die Indexfläche nach MacCullagh, s. unten, nicht das Indexellipsoid). Dieses Gesetz gilt nicht nur für Licht in Kristallen, sondern für beliebige Arten von Wellen in anisotropen Medien oder anisotropen Ausbreitungsverhältnissen. Da das Gesetz so allgemein und unabhängig von der Natur der Wellen besteht, kann man allerdings von der Indexfläche (im Gegensatz zum Indexellipsoid und zum Fresnelschen Ellipsoid) keine Auskunft erwarten über charakteristische Eigenschaften der Welle (z. B. Transversalität oder Longitudinalität, Polarisation).

Im folgenden ist zunächst das Gesetz abgeleitet. Es wurde in einigen Veröffentlichungen bereits auf Radiowellen in der Ionosphäre angewandt. Die Anwendungsbeispiele, die hier gebracht werden, sind: Schall in bewegter Luft und Materiewellen (Elektronenstrahlen) bei Anwesenheit eines Magnetfelds. Für diese Beispiele werden vor allem Bilder von Wellenflächen (Strahlenflächen) und Indexflächen gezeigt.

Bei Materiewellen findet man unter Umständen Wellenflächen, die sich sehr eigentümlich verhalten. Der Brechungsindex der Materiewellen (Elektronenstrahlen) ist hier so definiert wie der von anderen Wellen (z. B. Licht, Radiowellen). In der Elektronenoptik ist eine andere Definition üblich, die auch eine andere Formulierung der geometrisch-optischen Grundgesetze erfordert.

A. Einleitung

In anisotropen Medien weicht die Strahlrichtung im allgemeinen von der Wellennormale ab. Das ist beispielsweise so in der Kristalloptik, ferner auch bei Radiowellen in der Ionosphäre, da diese infolge des Erdmagnetfeldes anisotrop ist. Für Radiowellen wurden in einigen Veröffentlichungen[1,2] Strahlrichtungen und Strahlwege mittels eines Gesetzes der Kristalloptik bestimmt. Aber auch bei beliebigen anderen Wellen in anisotropen Medien (oder anisotropen Ausbreitungsverhältnissen) sind Strahlrichtung

[1] H. Poeverlein, S.-B. bayr. Akad. Wiss. math.-naturwiss. Klasse **1948**, 175.

[2] H. Poeverlein, Z. angew. Physik **1**, 517 [1949] und **2**, 152 [1950].

und Wellennormale voneinander verschieden und es gilt stets das erwähnte Gesetz der Kristalloptik. Die für Radiowellen gegebene Ableitung[1] läßt sich ohne weiteres auf beliebige Arten von Wellen übertragen.

Hier wird das Gesetz auf besonders einfache Weise und unter allgemeineren Gesichtspunkten nochmals abgeleitet und auf andere Arten von Wellen angewandt. Die Überlegungen sind rein geometrisch-optisch. Es werden auch *inhomogene* anisotrope Medien betrachtet, und zwar speziell solche mit ebener Schichtung. Vorausgesetzt ist immer langsame Änderung des Brechungsindex in Abhängigkeit vom Ort.

Die Bilder von Wellenflächen und Indexflächen, die gezeigt werden, liefern zusammen mit dem Gesetz eine gute Vorstellung von den Wellen und deren Ausbreitung nach dem Brechungsgesetz. Die Strahlrichtungen und Strahlwege, die man aus den Bildern ermittelt, sind selbstverständlich die, die man mit bekannten Methoden auch erhält.

Die geometrisch-optischen Methoden sind immer dieselben, unabhängig von der Art der Wellen. Es genügt für sie, wenn man die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellennormalenrichtung und vom Ort kennt, oder, was das gleiche bedeutet, die Indexfläche der Welle für jede Stelle; die Wellengleichung selbst braucht man dann nicht. Erst, wenn man über die geometrische Optik hinausgeht, kommt es auf die individuelle Wellengleichung der betreffenden Wellenart an, und erst, wenn man sich für die Eigenschaften der Welle und die Art der Schwingungen interessiert, muß man nach der Wellenfunktion und ihrer Bedeutung fragen.

B. Wellenfläche und Wellennormale, Indexfläche und Strahlrichtung

In einer *ebenen Welle* in einem homogenen Medium ist die Ortsabhängigkeit irgendeiner Größe der Welle (beispielsweise der elektrischen Feldstärke) gegeben durch

$$e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

oder

$$e^{i(\mathfrak{k},\mathfrak{r})}. \tag{1}$$

Der Ausbreitungsvektor $\mathfrak{k}$ hat die Richtung der Wellennormale und die Größe $2\pi/\lambda$ (λ = Wellenlänge). Der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ (Komponenten x, y, z) ist beliebig. Man kann

$$\mathfrak{k} = k_0 \mathfrak{n}$$

setzen. $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ soll der Betrag des Ausbreitungsvektors in Vakuum (oder im isotropen Ausgangsmedium) sein und $\mathfrak{n}$ ein Vektor, dessen Richtung die Wellennormale und dessen Betrag der Brechungsindex (bezogen auf Vakuum oder auf das Ausgangsmedium) ist („Normalvektor" nach M. Herzberger und Ph. Frank[3]). Aus (1) wird damit

$$e^{i k_0 (\mathfrak{n},\mathfrak{r})}. \tag{2}$$

In einer Welle, die sich vom Koordinatenursprung *radial nach allen Richtungen* ausbreitet, kann man in einigem Abstand vom Koordinatenursprung jedes Flächenelement der Wellenfläche als eben ansehen. Die Ortsabhängigkeit wird daher wieder durch (1) oder (2) dargestellt. $\mathfrak{r}$ ist dabei der Radiusvektor vom Koordinatenursprung zu einem Flächenelement der Wellenfläche. Die Vektoren $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{n}$ sind jetzt nicht konstant, sondern für jedes Flächenelement der Wellenfläche anders. Sie stehen überall senkrecht auf der Wellenfläche. Der Brechungsindex, der Betrag von $\mathfrak{n}$, ist eine Funktion der Richtung, wenn das Medium anisotrop ist. Der Radiusvektor $\mathfrak{r}$ gibt den Weg an, den das Flächenelement der Wellenfläche zurückgelegt hat. Infolgedessen ist die Richtung von $\mathfrak{r}$ die Strahlrichtung für das Flächenelement. Die Wellenfläche ist die Fresnelsche Wellenfläche, auch Strahlenfläche genannt.

Auf der Wellenfläche ist Ausdruck (2) konstant, also auch

$$(\mathfrak{n},\mathfrak{r}) = \text{const}. \tag{3}$$

Betrag und Richtung des Vektors $\mathfrak{n}$ sind eine Funktion der Richtung von $\mathfrak{r}$. Daß $\mathfrak{n}$ senkrecht auf der Wellenfläche steht, kann man ausdrücken durch

$$(\mathfrak{n},\delta\mathfrak{r}) = 0. \tag{4}$$

$\delta\mathfrak{r}$ soll dabei die Änderung von $\mathfrak{r}$ beim Übergang zu einem Nachbarpunkt in der Wellenfläche bedeuten und ist daher tangential zur Wellenfläche. Aus (3) folgt für den Übergang zu einem Nachbarpunkt auf der Wellenfläche

$$(\delta\mathfrak{n},\mathfrak{r}) + (\mathfrak{n},\delta\mathfrak{r}) = 0. \tag{5}$$

(4) und (5) zusammen ergeben

$$(\delta\mathfrak{n},\mathfrak{r}) = 0. \tag{6}$$

Diese Gleichung kann man ähnlich wie Gl. (4) auslegen. Gl. (4) sagte, daß $\mathfrak{n}$ senkrecht auf der Wellenfläche steht. Gl. (6) sagt daher: Trägt man

[3] Ph. Frank, Z. Physik **80**, 4 [1933]; W. Glaser, Z. Physik **80**, 451 [1933]; Ph. Frank, Strahlenoptik, in Ph. Frank u. R. v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik u. Physik, II, 2. Aufl., S. 1—43, Braunschweig 1935.

vom Koordinatenursprung nicht die Vektoren $\mathfrak{r}$ auf (wie in der Wellenfläche geschehen), sondern alle Vektoren $\mathfrak{n}$, die möglich sind, so erhält man eine Fläche, deren Normale überall die Richtung von $\mathfrak{r}$ hat. Die Fläche ist die graphische Darstellung des Brechungsindex zu jeder Wellennormalenrichtung in räumlichen Polarkoordinaten und heißt in der Kristalloptik (nach MacCullagh) Indexfläche.

Es gilt hiernach das *Gesetz: Die Strahlrichtung ist die Normale zur Indexfläche*[4]. Man kann das analoge (fast selbstverständliche) Gesetz hinzufügen: Die Wellennormale ist die Normale zur Wellenfläche. Mittels Gl. (3) läßt sich auch noch der Betrag des Vektors $\mathfrak{n}$ aus der Wellenfläche herauslesen, ebenso der Betrag von $\mathfrak{r}$ aus der Indexfläche. Man kann demnach aus der Wellenfläche die Indexfläche gewinnen und auf gleiche Weise aus der Indexfläche die Wellenfläche. Wellenfläche und Indexfläche sind in gewissem Sinn zueinander komplementär.

Das Gesetz gilt auch *in inhomogenen Medien* an jeder Stelle, sofern die Voraussetzungen für die Gültigkeit der geometrischen Optik gegeben sind. An die Stelle von $(\mathfrak{n}, \mathfrak{r})$ muß man dann für viele Zwecke das Integral

$$\int (\mathfrak{n}, d\mathfrak{s})$$

setzen mit dem vektoriellen Wegelement $d\mathfrak{s}$.

Die Ausbreitung von Wellen *in eben geschichteten Medien* mit langsam veränderlichem Brechungsindex ist dadurch bestimmt, daß erstens die Wellennormale stets in der Einfallsebene bleibt und zweitens das Brechungsgesetz gilt:

$$n \sin \varphi = \text{const} . \tag{7}$$

Diese beiden Bedingungen zusammen stellen in räumlichen Polarkoordinaten (n, φ) eine Gerade dar (bei horizontaler Schichtung eine vertikale Gerade). n und φ erhält man demnach als die Daten der Schnittpunkte dieser Geraden mit der Indexfläche (s. Abb. 2). Zugleich kann man die zugehörige Strahlrichtung als die Normale der Indexfläche im Punkt n, φ bestimmen. Die so ermittelten Strahlrichtungen lassen sich zu einem ganzen gekrümmten Strahlweg, wie er in geschichteten Medien auftritt, zusammensetzen[5].

C. Verschiedene Gesetze der Strahloptik

Gl. (6) liefert die Strahlrichtung (Richtung von $\mathfrak{r}$). Die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellennormalenrichtung muß dazu bekannt sein.

Verschiedene Gesetze der geometrischen Optik, die man auf anisotrope Medien übertragen kann, bestimmen ebenfalls die Strahlrichtung. Im folgenden seien einige davon kurz angegeben (nach Ph. Frank[3] und H. Bremmer[6]), und zwar in der vektoriellen Schreibweise. Es läßt sich zeigen (hier ist jedoch darauf verzichtet), daß diese Gesetze gleichbedeutend sind mit (6).

Das Eikonal ist im homogenen anisotropen Medium[7] definiert durch

$$S = k_0 (\mathfrak{n}, \mathfrak{r}) . \tag{8}$$

Die *Eikonalgleichung* lautet

$$\text{grad } S = k_0 \, \mathfrak{n} . \tag{9}$$

Man könnte glauben, sie sei eine fast triviale Folgerung von (8). Das ist aber nicht so, da $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{r}$ abhängt. Zur Ableitung der Eikonalgleichung verwendet man vorteilhaft Gl. (6) oder das daraus gewonnene Gesetz.

Das *Fermatsche Prinzip* kann für anisotrope Medien geschrieben werden

$$\delta \int_1^2 (\mathfrak{n}, d\mathfrak{s}) = 0 . \tag{10}$$

Diese Gleichung ist so zu verstehen wie bei isotropen Medien (Endpunkte des Integrationswegs sind nicht zu variieren); nur ist an Stelle des Produkts $n\,ds$ das skalare Produkt der Vektoren $\mathfrak{n}$ und $d\mathfrak{s}$ getreten. $\mathfrak{n}$ und $d\mathfrak{s}$ sind dabei immer passend zueinander zu wählen, so daß die Richtung von $d\mathfrak{s}$ die Strahlrichtung zu $\mathfrak{n}$ ist. $\mathfrak{n}$ ist also mitzuvariieren.

Das *Prinzip der stationären Phase* ist das, das zur

[4] Dieses Gesetz in der Kristalloptik sowie die geometrische Deutung des Brechungsgesetzes (s. unten) stammen von W. R. Hamilton (Trans. Roy. Irish Acad. **17**, 144 [1837]) und J. MacCullagh (Trans. Roy. Irish Acad. **17**, 252 [1837] und Collect. Works S. 36, London 1880). Siehe auch G. Szivessy, Handb. Physik **20**, 680 u. 707, Berlin 1928. Die hier gegebene Ableitung des Gesetzes ist im wesentlichen die von Hamilton. — Statt der Indexfläche (Vektor $\mathfrak{n}$) kann man auch die Ausbreitungsfläche (Vektor $\mathfrak{k}$) nehmen. Über Ausbreitungsflächen von Kristallgittern und deren Anwendung auf die Gitterbeugung siehe E. Fues, Ann. Physik (5) **36**, 209 [1939].

[5] Ausgeführt in den angegebenen Arbeiten über Radiowellen-Ausbreitung[1, 2]. Bezüglich kugelförmig geschichteter Medien s.[2], 2. Arbeit (S. 152, Fußnote).

[6] H. Bremmer, Terrestrial radio waves, Theory of propagation, New York, Amsterdam, London, Brussels 1949; Philips Res. Rep. **4**, 1, 189 [1949].

[7] Im inhomogenen Medium ist $(\mathfrak{n}, \mathfrak{r})$ durch das oben angegebene Integral zu ersetzen.

Ableitung der Gl. (6) für Radiowellen[1] schon verwendet wurde[8].

Bei elektrischen Wellen ist die Strahlrichtung, die man auf irgendeine Weise erhält, stets die Richtung des zeitlichen Mittels des Poyntingschen Vektors.

D. Schall in bewegter Luft

Luft wird durch Wind für die Schallausbreitung anisotrop. Davon, daß die Schallgeschwindigkeit von der Temperatur und Zusammensetzung (Wasserdampfgehalt) der Luft abhängt, soll hier abgesehen werden. Im allgemeinen nimmt die Windgeschwindigkeit mit der Höhe zu. Die Luft ist dann ein eben geschichtetes anisotropes Medium. Schallwege in Wind hat früher R. Emden ausführlich berechnet[9]. Hier soll die Schallausbreitung an Hand der Indexflächen erläutert werden.

Zunächst sei homogene Luftbewegung (unabhängig von der Höhe) angenommen. Die Wellenflächen sind dann Kugeln, wie man in einem mit der Luft mitbewegten Bezugsystem sieht[10]. Durch die Luftbewegung werden die Wellenflächen nur verschoben. Für die Wellenfläche, die vor 1 Sekunde die Schallquelle verlassen hat, ist der Kugelradius c (c = Schallgeschwindigkeit in ruhender Luft) und die Verschiebung gleich der Luftgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ (Abb. 1). Das Wellenzentrum (Koordinatenursprung) liegt innerhalb oder außerhalb der Kugel, je nachdem $v/c < 1$ oder > 1 ist. Der Fall $v/c > 1$ kommt in der freien Atmosphäre nicht vor. Allgemein bekannt dagegen ist der Fall, daß eine Schallquelle sich mit Überschallgeschwindigkeit bewegt. Für ein mit der Schallquelle bewegtes Bezugsystem ist dann $v/c > 1$. An diesem Beispiel kann man also die Verhältnisse für Luft, die mit Überschallgeschwindigkeit bewegt ist, untersuchen.

Der Radiusvektor vom Koordinatenursprung zu einem Punkt der Wellenfläche ist der Strahlvektor (Weg des Elements der Wellenfläche). In Abb. 1 ist er, da die Zeiteinheit zugrunde gelegt ist, die sog. Strahlgeschwindigkeit (diese ist die Gruppengeschwindigkeit, wenn keine Dispersion vorhanden ist). Die Projektion der Strahlgeschwindigkeit auf die Wellen-

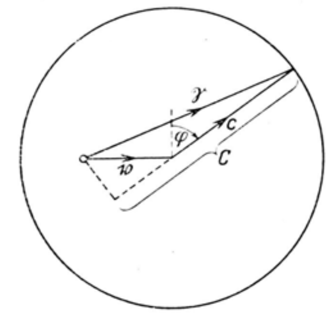

Abb. 1. Wellenfläche von Schall bei Wind ($v/c < 1$). ○ Wellenzentrum, $\mathfrak{v}$ Windgeschwindigkeit, c Schallgeschwindigkeit ohne Wind, C Phasengeschwindigkeit, $\mathfrak{C}$ Strahlgeschwindigkeit (Strahlrichtung).

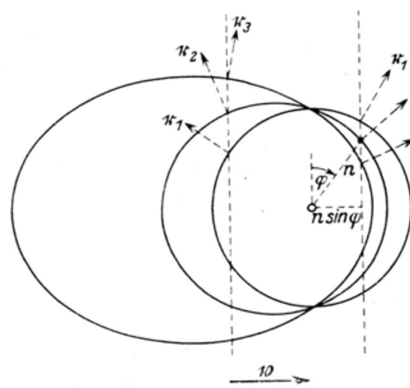

Abb. 2. Indexflächen von Schall bei Wind ($v/c < 1$). ○ Koordinatenursprung, $\mathfrak{v}$ Windrichtung, $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ Strahlrichtungen (Reihenfolge zunehmender Windgeschwindigkeit).

normale (Kugelnormale) ist die Phasengeschwindigkeit C

$$C = c + v \sin\varphi .$$

$90° - \varphi$ bedeutet dabei den Winkel zwischen Luftgeschwindigkeit und Wellennormale (s. Abb. 1). Der Brechungsindex ist

$$n = c/C = \frac{1}{1 + v/c \sin\varphi} .$$

Diese Beziehung $n(\varphi)$ stellt in ebenen Polarkoordinaten für $v/c < 1$ eine Ellipse (Abb. 2), für $v/c > 1$ eine Hyperbel (Abb. 3) dar. Der Koordinatenursprung ist der eine Brennpunkt. Die Indexfläche ist hiernach

[8] Näheres über das Prinzip der stationären Phase und Anwendung dieses Prinzips siehe C. Eckart, Rev. mod. Physics **20**, 399 [1948] (eindimensionale Betrachtung, nicht anisotrop); H. G. Booker, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **237**, 411 [1939]; H. Bremmer[6].

[9] R. Emden, Meteorol. Z. **1918**, 13, 74 u. 114; s. auch E. A. Milne, Philos. Mag. J. Sci. (6) **42**, 96 [1921]; Beobachtungen von E. v. Angerer u. R. Ladenburg, Ann. Physik (4) **66**, 293 [1921].

[10] Die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion braucht man hier wie bisher nicht zu beachten. In dem bewegten Bezugsystem ist durch Doppler-Effekt die Frequenz an verschiedenen Stellen der Wellenfläche verschieden. Das macht aber nichts aus; denn die Wellenfläche soll nur die Enveloppe aller möglichen Wellenebenen sein, die auch zu ebenen Wellen von uneinheitlicher Frequenz gehören können.

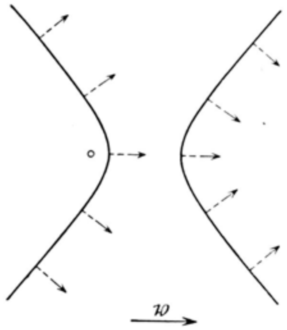

Abb. 3. Indexfläche von Schall bei Wind ($v/c > 1$). ○ Koordinatenursprung, $\mathfrak{v}$ Windrichtung, gestrichelte Pfeile: Strahlrichtung.

ein Rotationsellipsoid oder ein zweischaliges Rotationshyperboloid.

Für $v/c > 1$ liegen alle Strahlrichtungen, die möglich sind, innerhalb eines Kegels, des Machschen Kegels. Auch die Phasengeschwindigkeit kann dann nicht beliebige Richtungen annehmen. Das alles ist gut bekannt oder einleuchtend in dem oben erwähnten Beispiel der bewegten Schallquelle ($v/c > 1$) mit mitbewegtem Bezugsystem.

Wenn die Windgeschwindigkeit mit der Höhe zunimmt, so nimmt auch die Exzentrizität der Indexfläche mit der Höhe zu (Abb. 2[11]). Das Brechungsgesetz (7) wird in der Schar der Indexflächen durch eine vertikale Gerade dargestellt (vgl. Abschnitt B). Man sieht in Abb. 2, daß bei Schallausbreitung *mit* dem Wind (vertikale Gerade rechts vom Koordinatenursprung) ein aufsteigender Strahl (Flächennormalen in den Schnittpunkten) mit zunehmender Windgeschwindigkeit zum Boden hin gedreht wird, bei Schallausbreitung *gegen* den Wind dagegen vom Boden weg, so, wie es bekannt ist.

E. Materiewellen (Elektronenstrahlen)

Die Ausbreitungsverhältnisse für Materiewellen sind anisotrop, wenn ein Vektorpotential $\mathfrak{A}$ und somit ein Magnetfeld gegeben ist. Die Schrödinger-Gleichung lautet dann (bei beliebigem zeitlich konstantem elektrischem und magnetischem Feld)[12]

$$\frac{1}{2\,m}\left(\frac{\hbar}{i}\,\nabla - \frac{e}{c}\,\mathfrak{A}\right)^2 \psi = (W - V)\,\psi\,. \tag{11}$$

Hierin bedeuten W die Gesamtenergie, V die potentielle Energie, also $W - V = m\,v^2/2$ die kinetische Energie der Teilchen[13]. Durch Einsetzen der Wellenfunktion

$$\psi = C\,e^{i\int(\mathfrak{k},\,d\mathfrak{s})} \tag{12}$$

und Einführung der Teilchengeschwindigkeit v an Stelle von $W - V$ erhält man unter der Voraussetzung, daß alle Größen, außer der Wellenfunktion, sich nur langsam mit dem Ort ändern, die Gleichung[14]

$$\left(\hbar\,\mathfrak{k} - \frac{e}{c}\,\mathfrak{A}\right)^2 = (m\,v)^2\,. \tag{13}$$

Den Brechungsindex-Vektor $\mathfrak{n}$, der proportional $\mathfrak{k}$ sein soll, kann man (etwas abweichend von Abschnitt B) ansetzen

$$\mathfrak{n} = \frac{\hbar}{m\,c}\,\mathfrak{k}\,.$$

$\mathfrak{n}$ ist damit dimensionslos und der Proportionalitätsfaktor eine universelle Konstante. Aus Gl. (13) folgt dann

$$\left(\mathfrak{n} - \frac{e}{m\,c^2}\,\mathfrak{A}\right)^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2. \tag{14}$$

Relativistisch formuliert ist diese Gleichung so[15]:

$$\left(\mathfrak{n} - \frac{e}{m\,c^2}\,\mathfrak{A}\right)^2 = \frac{(v/c)^2}{1-(v/c)^2}\,. \tag{14a}$$

Gl. (14) soll skalar geschrieben werden. Man kann dazu $\mathfrak{A}$ in der x-Richtung und $\mathfrak{n}$ in der x,z-Ebene annehmen (Komponenten n_x, n_z) und erhält dann

$$\left(n_x - \frac{e}{m\,c^2}\,A\right)^2 + n_z{}^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2, \tag{15}$$

oder man führt den Winkel (α) zwischen der Richtung von $\mathfrak{A}$ und der Wellennormale ein und erhält

$$n^2 - 2\,\frac{e}{m\,c^2}\,A\,n\cos\alpha + \left(\frac{c}{m\,c^2}\,A\right)^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2. \tag{16}$$

Diese Gleichung kann allgemein zur Berechnung des Brechungsindex der Materiewellen verwendet wer-

[11] Die Werte von v/c in Abb. 2 sind 0, 1/3 und 2/3. Die atmosphärischen Verhältnisse sind also übertrieben.

[12] W. Pauli, Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik, Handb. Physik, 2. Aufl., 24, 1, S. 108—111, Berlin 1933; A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, Bd. 2, S. 43—45 und 720—722, Braunschweig 1939.

[13] Das Quadrat in der Gleichung soll das skalare Produkt bedeuten, $\nabla^2 = \Delta$ den Laplace-Operator, $\nabla\psi = \operatorname{grad}\psi$, $\nabla\,\mathfrak{A} = \operatorname{div}\mathfrak{A} = 0$. m ist die Ruhmasse, e die Ladung des Elektrons (negativ einzusetzen), $\hbar = h/2\pi$.

[14] Addition und Subtraktion der Vektoren immer vektoriell!

[15] Gl. (13) ist im wesentlichen die erweiterte de Broglie-Beziehung

$$\hbar\,\mathfrak{k} = m\,\mathfrak{v} + e\,\mathfrak{A}/c\,.$$

Gl. (14a), etwas anders geschrieben, gibt W. Glaser[3] für den „Normalvektor" $\mathfrak{n}$ an. Hier werden daraus der Brechungsindex $|\mathfrak{n}|$ und die Indexfläche gewonnen.

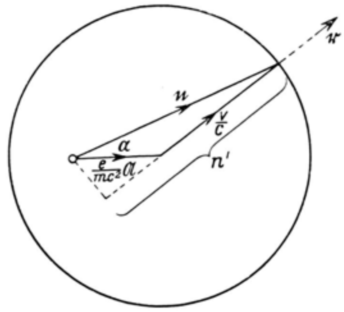

Abb. 4. Indexfläche von Materiewellen, $\left|\frac{e}{mc^2}A\right| < \frac{v}{c}$.
○ Koordinatenursprung, $\mathfrak{r}$ Strahlrichtung.

den. Lediglich die rechte Seite ist erforderlichenfalls nach (14a) relativistisch umzuschreiben.

Die Indexfläche ist nach Gl. (15) eine Kugel, die in der Richtung $e\mathfrak{A}$ (x-Richtung) vom Ursprung verschoben liegt (Abb. 4). Der Koordinatenursprung kann sich außerhalb oder innerhalb der Kugel befinden. Die Strahlrichtung ist auch hier die Normale zur Indexfläche.

Die Strahlrichtung der Materiewellen stellt die Flugrichtung der Teilchen dar, der Strahlweg also die Bahn der Teilchen unter dem Einfluß des elektrischen und magnetischen Feldes[16], wobei diese Felder gegeben sind durch

$$e\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} V,$$
$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}.$$

Setzt man einfach zu überblickende Verhältnisse voraus, etwa indem man in Gl. (15) $A = A_x$ und v nur von z abhängen läßt — das ist wieder ebene Schichtung —, so kann man auf die beschriebene Weise (Abschnitt B, Abb. 2) Strahlwege konstruieren und auch leicht bestätigen, daß die Strahlrichtung übereinstimmt mit der Flugrichtung der Teilchen, die sich infolge der elektrischen und magnetischen Ablenkung ergibt. Da die Indexflächen von Materiewellen so einfach aussehen, können sie vielleicht manchmal zur Anwendung des Brechungsgesetzes und zur Ermittlung von Strahlrichtungen nützlich sein.

Die Wellenflächen von Materiewellen

Die Indexflächen von Materiewellen sind dasselbe wie die Wellenflächen von Schall in bewegter Luft (Abb. 1), nämlich exzentrische Kugeln. Infolge der Komplementarität von Indexflächen und Wellenflächen (Abschnitt B) sind die Wellenflächen jetzt das, was bei Schall die Indexflächen waren: Rotationsellipsoide (Abb. 2) oder zweischalige Rotationshyperboloide (Abb. 3).

Unter Wellenflächen sind hier immer die Wellenflächen verstanden, die man bei einem allseitig ausstrahlenden Wellenzentrum im homogenen „Medium" (konstantes $\mathfrak{A}$ und V bzw. v) erhält. Im inhomogenen Medium treten diese Wellenflächen nur in der Nähe eines Wellenzentrums auf, also nur in der Nähe eines Punktes, von dem aus Teilchen in beliebiger Richtung wegfliegen. Die Wellenflächen sind auch die, die man bei Anwendung des Huygensschen Prinzips als Elementarwellen anzusetzen hat.

Sehr merkwürdig ist das zweischalige Hyperboloid, das sich als Wellenfläche ergibt, wenn der Koordinatenursprung außerhalb der Indexfläche liegt, wenn also [vgl. (15)]

$$\left|\frac{e}{mc^2}A\right| > \frac{v}{c} \tag{17}$$

ist. In manchen Richtungen, vom Koordinatenursprung (Wellenzentrum) ausgehend, trifft man beide Schalen der Fläche, in anderen Richtungen dagegen keinen Teil der Fläche. Diese Strahlrichtungen (= Flugrichtungen von Teilchen) sollten demnach gar nicht möglich sein. Das ist aber nicht denkbar. Des Rätsels Lösung findet man durch Abschätzung der Gruppengeschwindigkeit[17] aus (13) und der Frequenzbedingung

$$W = \hbar\,\omega\,.$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist negativ für die Hyperboloidschale, die vom Koordinatenursprung abgekehrt liegt (in Abb. 3 die rechte). Zu dieser Hyperboloidschale gehören demnach nicht die Strahlrichtungen vom Ursprung zur Fläche, sondern die entgegengesetzten von der Fläche zum Ursprung.

Man muß sich hier daran erinnern, daß es nach der Theorie nicht nur die bisher behandelten üblichen Wellenflächen geben kann, die im Ursprungspunkt entstehen und sich allseitig ausdehnen, sondern auch solche, die sich zum Ursprung hin zusammenziehen. Diese letzteren gehen aus den üblichen Wellenflächen durch Spiegelung am Ursprung hervor. Für sie ist die Strahlrichtung normalerweise die Richtung von der

[16] S. dazu C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **117**, 258 [1927]. In dem Beispiel von magnetischer Ablenkung, das Darwin behandelt, stimmt die Flugrichtung des Elektrons stets mit der Richtung von $\mathfrak{A}$ überein. In diesem speziellen Beispiel sind daher Strahlrichtung und Wellennormale nirgends voneinander verschieden.

[17] Die Projektion der Gruppengeschwindigkeit in die Richtung der Wellennormale ist $d\omega/dk$. Dieser Differentialquotient ergibt sich im vorliegenden Fall negativ. Die Richtung der Gruppengeschwindigkeit ist die Strahlrichtung.

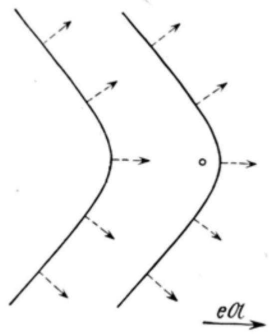

Abb. 5. Wellenfläche von Materiewellen, $\left|\frac{e}{m c^2} A\right| > \frac{v}{c}$. ◦ Wellenzentrum, gestrichelte Pfeile: Richtung der Phasengeschwindigkeit.

Fläche zum Ursprung. Man kann nun die Hyperboloidschale mit negativer Gruppengeschwindigkeit am Ursprung spiegeln. Die Strahlrichtungen, die in diesem Fall vor der Spiegelung zum Ursprung hinführten, gehen nach der Spiegelung vom Ursprung zur Fläche, wie man es haben will. Aber die gespiegelte Hyperboloidschale selbst läuft zusammenschrumpfend zum Ursprung hin. Das Bild der ganzen Wellenfläche (die eine Schale gespiegelt) ist in Abb. 5 dargestellt. Jede Strahlrichtung, die vom Ursprung ausgeht, trifft einen Punkt der Fläche. Eine Schale der Fläche (in Abb. 5 die rechte) wandert vom Ursprung weg, die andere aber zum Ursprung hin. In der letzteren bilden demnach Strahlrichtung und Phasengeschwindigkeit miteinander einen Winkel über 90°; das ist die Folge der negativen Gruppengeschwindigkeit.

Wenn das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ genügend groß ist, sind also in einem gewissen Richtungsbereich Wellen möglich, die zu einem Punkt hin zusammenlaufen, anstatt von einem Punkt auszugehen, wie sie es sonst tun. Hat man einen scharfen Strahl, so wandern unter diesen Bedingungen die Wellenflächen entgegengesetzt der Flugrichtung der Teilchen. In Experimenten treten aber nie die Wellen selbst in Erscheinung. Man kann infolge der Eichinvarianz der Schrödinger-Gleichung [12, 18] nicht einmal angeben, wie sie in einem gegebenen Fall wirklich aussehen; denn $\mathfrak{A}$ und V sind nicht vollständig bestimmt. Beispielsweise kann man zu $\mathfrak{A}$ einen willkürlichen konstanten Vektor addieren. Auf diese Weise läßt sich aber stets erreichen, daß die Wellenflächen an einer bestimmten Stelle keine Hyperboloide sind. Die Hyperboloid-Wellenflächen mit ihrem merkwürdigen Verhalten können sich daher auf keine Weise bemerkbar machen. Wenn in einem geschichteten Medium das Vektorpotential einen genügend großen Wertebereich umfaßt, ist diese Art von Wellenflächen allerdings nicht an allen Stellen vermeidbar, sondern sie kann durch Abänderung von $\mathfrak{A}$ nur in ein anderes Gebiet verlegt werden.

Bei Licht und Radiowellen ist im Gegensatz zu den Materiewellen keine negative Gruppengeschwindigkeit möglich [19], vorausgesetzt, daß die Wellen als eben angesehen werden können, und auch keine Absorption mitspielt. Das Aussehen der Wellenflächen ist bei elektrischen Wellen auch nicht unbestimmt durch die Unbestimmtheit von Größen wie $\mathfrak{A}$ und V.

Der Brechungsindex in der Elektronenoptik

Der Brechungsindex, den man in der Elektronenoptik nach Ph. Frank und W. Glaser angibt [3, 20], ist anders definiert als hier. Er sei mit n' bezeichnet zum Unterschied vom obigen n. In der Elektronenoptik fordert man, daß das Fermatsche Prinzip in der gleichen Form wie für isotrope Medien gilt,

$$\delta \int n' \, ds = 0 .$$

Wie man durch Vergleich dieses Ausdrucks mit dem oben gebrachten Fermatschen Prinzip für anisotrope Medien (10) sieht, ist n' (bis auf einen beliebigen konstanten Faktor) die Projektion von n in die Richtung des Wegelements $d\mathfrak{s}$, also in die Strahlrichtung (s. auch Abb. 4):

$$n' = n \cos \varphi_s ,$$

wenn φ_s der Winkel zwischen Wellennormale (Richtung von $\mathfrak{n}$) und Strahlrichtung ist. Im isotropen Fall ($\mathfrak{A} = 0$, kein magnetisches Feld) stimmen n' und n überein.

n ist umgekehrt proportional zur Phasengeschwindigkeit und entspricht dem Brechungsindex der Kristalloptik. n' dagegen ist umgekehrt proportional zur Strahlgeschwindigkeit und ist somit das, was man in der Kristalloptik Strahlenindex nennt (nach M. Born, s. z. B. G. Szivessy [4], S. 651).

Der hier definierte Brechungsindex n folgt zwanglos aus der Wellentheorie. Er ist der Betrag des

[18] V. Fock, Z. Physik **39**, 226 [1926]; F. London (im Anschluß an H. Weyl), Z. Physik **42**, 375 [1927].

[19] Man sieht das, wenn man aus $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H} = [\mathfrak{n}\mathfrak{E}]$ (diese Beziehung folgt aus der einen Maxwellschen Gleichung) den Poyntingschen Vektor bildet. Dieser und $\mathfrak{n}$ können keinen stumpfen Winkel miteinander bilden.

[20] E. Brüche u. O. Scherzer, Geometrische Elektronenoptik, Berlin 1934, S. 38.

Frankschen Normalvektors $\mathfrak{n}$ und ist zu berechnen aus Gl. (16). Das Brechungsgesetz (7) und die Eikonalgleichung (9) gelten nur für ihn. Für den Brechungsindex n' der Elektronenoptik müssen Brechungsgesetz und Eikonalgleichung abgeändert werden, wie es W. Glaser[3] macht. Bekanntlich geht man aber in der geometrischen Elektronenoptik häufig gar nicht von geometrisch-optischen Gesetzen aus, sondern von der elektrischen und magnetischen Ablenkung der Elektronen.

F. Schlußbemerkungen

In den oben behandelten Beispielen der Wellenausbreitung ist die Indexfläche eine algebraische Fläche 2. Grades. In der Kristalloptik und bei Radiowellen dagegen ist sie vom 4. Grad. Es tritt dann Doppelbrechung ein; denn das Brechungsgesetz liefert mit einer Indexfläche 4. Grades im allgemeinen 4 Lösungen für die Welle im anisotropen Medium: zwei aufsteigende Wellen und zwei absteigende Wellen[2]. Eine Indexfläche 4. Grades kann in inhomogenen (geschichteten) Medien auch zu allerlei sonderbaren Erscheinungen führen, wie das Beispiel der Radiowellen[1,2] zeigt.

Die zitierten Arbeiten befassen sich mit Kristalloptik ([4] und Ph. Frank[3]), mit Licht in bewegten Medien (Ph. Frank[3]), mit Radiowellen ([1,2,6] und H. G. Booker[8]), mit Schall bei Wind[9] und mit Materiewellen oder der Schrödinger-Gleichung ([12,16,18]) sowie mit der eigentlichen geometrischen Elektronenoptik ([20] und W. Glaser[3]). Die allgemeinen Gesetze der Wellenausbreitung in anisotropen Verhältnissen (abgesehen von dem hier ausführlich behandelten Gesetz) bringen Ph. Frank[3] und H. Bremmer[6].

Über einen konzentrationsabhängigen H-D-Austauschprozeß an den Oberflächen von Aluminiumkathoden

Von Eva Kühne-Sauter

Aus der Forschungsstelle für Spektroskopie in der Max-Planck-Gesellschaft
(ehem. Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik, Hechingen)

(Z. Naturforschg. **5 a**, 499—501 [1950]; eingegangen am 3. Mai 1949)

Es wird ein Deuterium-Anreicherungs-Prozeß untersucht, der an Aluminium-Oberflächen stattfindet, die im Vakuum mit D_2O-H_2O-Gemischen bestimmter Konzentration benetzt werden und als Kathoden einer Glimmentladung spektroskopischen Messungen zugänglich sind. Quantitative Spektraluntersuchungen ergeben eine Abhängigkeit der Anreicherung von der Konzentration der Ausgangsflüssigkeit. Es wird bei stärkerer D_2O-Konzentration eine Anreicherung des D in der Kathode festgestellt, während bei D_{aq}/H_{aq}- Verhältnissen $< 1:400$ eine Verarmung an Deuterium beobachtet wird.

Bei Helium-Glimmentladungen mit einer Schülerschen Hohlkathode aus Aluminium tritt neben den Atomlinien von Al und He das Spektrum des Aluminiumhydrids auffallend intensiv in Erscheinung[1], da Aluminium immer Wasserstoff enthält, auch wenn es im Vakuum geschmolzen wurde. Bereits in früheren Arbeiten zeigten Schüler und Mitarbb.[2], daß Aluminiumhydrid nicht im Gasraum, sondern an der Metalloberfläche entsteht. Durch die starke Intensität des AlH-Spektrums müßte es möglich sein, neben diesem auch das Aluminium-Deuterid-Spektrum zu beobachten, da D : H im Verhältnis 1 : 6000 in der Natur vorkommt. Auch ist eine spektroskopische Beobachtung hier besonders günstig, da die 0-0-Bande[3] von AlH bei 4241 Å in einem photographisch bequem zugänglichen Gebiet liegt und nach Rot abschattiert ist, so daß die nach kürzeren Wellen verschobene Bande des schweren Isotops wenigstens zu einem Teil ungestört erscheint. Außerdem sind die beiden Kanten um 6 Å gegeneinander verschoben und bei der zur Verfügung stehenden Dispersion gut getrennt. Das Mischungsverhältnis von H und D, wie es sich an oder in der Al-Oberfläche einstellt, kann somit spektroskopisch an der AlH-Bande geprüft werden.

Die Versuche wurden mit einer Entladungsröhre

[1] H. Schüler u. H. Gollnow, Z. Physik **93**, 611 [1935].

[2] H. Schüler, H. Gollnow u. H. Haber, Z. Physik **111**, 508 [1939].

[3] Holst u. Hulthén, Z. Physik **90**, 712 [1934].